Глава 1

Матем. основы

1.1 Обозначения из мат. логики

Следующие символы мы будем употреблять исключительно в качестве значков, позволяющих сократить запись и избежать появления выражений русского языка внутри математических формул.

$\forall$ – "для любого";

$\exists$ – "существует" (соответственно, $\nexists$ – "не существует");

$\bar{A}$ – "не A";

$\wedge$ – логическое "и", никаких отличий от союза "и" в русском языке не имеет;

$\vee$ – логическое "или", учтите, что оно не исключающее!

$\Rightarrow$ – "следует";

$\Leftrightarrow$ – "равносильно".

1.2 Обозначения из теории множеств

Множество - базовое понятие, оно не определяется, а раскрывается на примерах, синонимах, демонстрации свойств.

Если множество задано перечислением элементов (пусть это будут числа 2, 3, 11), то необходимо строго соблюдать следующий синтаксис: $A = \{2, 3, 11\}$.

$\varnothing$ – пустое множество;

Ω – универсальное множество;

$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \{x \mid x \in A \ \Rightarrow \ x \in B\}$ – включение A в B, A – подмножество B;

$A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$ – пересечение A и B;

$A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$ – объединение A и B;

$\bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad \{x \mid x \notin A\}$ – дополнение к A;

$A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$ – разность между A и B;

$\|A\|$ – мера множества A. Мера конечного множества равна количеству элементов.

1.3 Сведения из теории вероятности

Событие - базовое понятие, оно не определяется, понимаем так: "нечто произошло", например, стрелок попал в мишень. События:

а) элементарные, которые нельзя разбить на более простые, например, "выпало 1 очко на кубике" (обозначим A_1 - 1 очко, ..., A_6 - 6 очков);

б) составные, которые можно разбить на более простые (и в конце - на элементарные), например, "выпало четное число на кубике" (обозначим его просто А, без индекса).

Очевидно, $A = \{A_2, A_4, A_6\}$, так, например, $A_2 \in A$, но $A_3 \notin A$.

A_2, A_4, A_6 – элементарные события, *благоприятные* событию А,

A_1, A_3, A_5 – *неблагоприятные.*

События образуют *полную группу* Ω, если хотя бы одно из них должно произойти.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступления остальных.

События называются *равновозможными*, если ни одно из них не имеет преимуществ перед другими.

Случаи или *шансы* – это события, которые одновременно попарно несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Задача, в которой возникают случаи, называется *схема случаев* (азартные игры, лотереи и т.д.). Обозначим

$$\|A\| = m, \quad \|\Omega\| = n. \tag{1.1}$$

В схеме случаев числа m, n означают количество благоприятных случаев и количество всех случаев. Схема случаев позволяет дать *классическое определение вероятности*:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

В опытах, не удовлетворяющих схеме случаев, вероятность может быть определена более общим образом

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|},$$

где, однако, мера множества уже не сводится к числу его элементов.

Суммой событий $A + B$ называется событие, состоящее в том, что хотя бы одно из данных событий произошло.

Произведением событий AB называется событие, состоящее в том, что произошли оба события, и то, и другое.

Противоположным событием $\bar{A}$ называется событие, состоящее в том, что событие A не произошло.

Пусть $\|A\| = m_1, \quad \|B\| = m_2, \quad \|AB\| = m_{12}$. Тогда

$$P(A+B) = \frac{\|A \cup B\|}{\|\Omega\|} = \frac{m_1 + m_2 - m_{12}}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_{12}}{n} = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.3}$$

События называются *зависимыми*, если наступление одного из них влияет на вероятность наступления другого и *независимыми* в противном случае. Для независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.4}$$

1.4 Комбинаторика

1. *Перестановкой* называется способ упорядочить элементы множества. Количество всех перестановок для n элементов
$$p_n = n!, \quad \text{где} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \tag{1.5}$$
– *факториал* числа n. Дополнительно полагают $0! = 1, 1! = 1$.

2. *Сочетанием* из n по k называется выбор k-элементного подмножества из n-элементного множества. Количество всех сочетаний из n по k
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.6}$$

1.5 Мат. статистика

Измеримая величина называется *случайной* (С.В.), если они случайным образом принимает значения из некоторого множества.

Закон распределения вероятности – соответствие между значениями С.В. и их вероятностями

$$P(x_i) = p_i.$$

Его удобно записывать в виде таблицы

X	x_1	...	x_n
P	p_1	...	p_n

Пример: X – число гербов, в сумме выпавших на двух монетах. При рассмотрении этого примера следует обратить внимание на то, что вероятность 1 можно вычислить двумя способами:

1) $P(1) = P(\text{ГР+РГ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (здесь Г - "герб", Р - "решка");

2) $P(1) + P(\text{РР}) + P(\text{ГГ}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(1) = \frac{1}{2}$.

Во втором способе рассуждений применено основное свойство закона распределения

$$\sum p_i = 1. \tag{1.7}$$

Приведем простейшие характеристики С.В.

$M(X) = \sum x_i p_i$ – *математиеское ожидание*;

$\Delta X = X - M(X)$ – *отклонение*;

$D(X) = M\left((\Delta X)^2\right) = \sum (x_i - M(X))^2 p_i$ – *дисперсия*;

$\sigma = \sqrt{D(X)}$ – *среднеквадратичное отклонение* (СКО);

$M_o(X)$ – *мода* – значение С.В. с наибольшей вероятностью.

Пусть проведена серия из N испытаний, в ходе которых измерены значения случайной величины X. Если результаты измерения расположить в порядке возрастания (нестрогого, потому что некоторые значения могут повторяться несколько раз, как, например, с многократным бросанием кубика), то получится *вариационный ряд*

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_N.$$

Медиана $M_e(X)$ – середина вариационного ряда.

Пример: класс получил оценки за контрольную работу: $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5$.

Ответ: $M_e = 3,\ M_o = 4,\ M \approx 3,27$.

n_i – *частота значения* x_i - количество повторов x_i в вариационном ряде. В примере выше: $n(2) = n(3) = 3,\ n(4) = 4$.

Распределение частот удобно записать в виде таблицы

X	2	3	4	5
n	3	3	4	1

, $\sum n_i = N$.

Посмотрев на ситуацию глазами инспектора, убедимся, что его интересует не количество, скажем, двоек, а процент, доля.

$w_i = \frac{n_i}{N}$ – *относительная частота*. $\sum w_i = 1$. В реальности $w_i \approx p_i$, причем приближение тем точнее, чем больше проведено опытов, и дает точное равенство в бесконечном пределе (закон больших чисел, ЗБЧ)

$$\lim_{N \to \infty} w_i = p_i. \tag{1.8}$$

Для значительного большинства С.В. имеют место закономерности:

1) $M_o \approx M$, то есть значения вблизи среднего встречаются чаще других;
2) большие отклонения встречаются реже, чем больше отклонение, теме реже оно встречается;
3) сильное различие между M_o, M_e и M говорит о наличии неравновесных процессов в системе или о вмешательстве человеческого фактора.

Эти закономерности находят идеальное выражение в *нормальном распределении.* Плотность вероятности (функция, которую нужно проинтегрировать по интервалу (x_1, x_2) для нахождения вероятности события "$x_1 \leq X \leq x_2$") нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

$M_o = M_e = M = a$, σ – СКО. Имеет место *"правило трех сигм"*

$$P(a - 3\sigma \leq X \leq a + 3\sigma) \approx 99,97\%.$$

Главенствующая роль нормального распределения создается действием *центральной предельной теоремы* (ЦПТ):

Сумма большого числа С.В. имеет распределение, близкое к нормальному.